1. 证明或推翻下列命题：“设⊕表示集合的对称差运算，则对于任意集合A和B 成立：P(A)⊕P(B)=P(A)⊕P(C)⇔B=C”。

　　解答与评分标准：

　　命题成立(2分)

　　证明：⊕有消去律，P(A)⊕P(B)=P(A)⊕P(C)⇔P(B)=P(C) (3分)

　　P(B)=P(C)⇔B=C (3分)

　　其他细节(2分)

　　2. 证明或推翻下列命题：“设 R 是从A 到B 的二元关系，则下列两个条件互为充要条件。条件一：存在C⊆A 且D⊆B”使得R=C×D。条件二：对于A中任意x1,x2 和B 中y1,y2，有(x1Ry1∧x2Ry2)→x1Ry2.”

　　解答与评分标准：

　　命题成立(2 分)。

　　条件一 ⇒ 条件二：x1∈C，y2∈D(3 分)。

　　条件二⇒ 条件一：C=dom(R)，D=ran(R)(3 分)。

　　其他细节(2 分)

　　3. 设 A={1,2,…,10}，定义A 上的二元关系R={|x,y∈A∧x+y=10}，说明R具有哪些性质并说明理由。

　　解答与评分标准：

　　讨论 5 种性质(各2 分)。

　　非自反：<1,1>不属于A。

　　非反自反：<5,5>∈A。

　　对称：定义。

　　非反对称：<3,7>,<7,3>∈A 但7 不等于3。

　　非传递：<3,7>,<7,3>∈A 但<3,3>不属于A。

　　3. 比较下列集合的基数大小并给出证明：A×A，P(A)，2→A，A→2.

　　解答与评分标准：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2(2 分)，

　　|P(A)| = |A→2| = 2|A|(2 分)。

　　分情况讨论：

　　(1) A 为空集：注意A→2={空关系}，

　　|A×A| = |2→A| = 0 < |P(A)| = |A→2| = 1。(1 分)

　　(2) A 为有限集且|A|=1：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2 = 1 < 2 = 2|A| = |P(A)| = |A→2| 。(1 分)

　　(3) A 为有限集且|A|=2：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2 = 4 = 2|A| = |P(A)| = |A→2| 。(1 分)

　　(4) A 为有限集且|A|=3：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2 =9 > 8 = 2|A| = |P(A)| = | A→2| 。(1 分)

　　(5) A 为有限集且|A|>4：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2 < 2|A| = |P(A)| = |A→2| 。(1 分)

　　(6) A 为无限集：

　　|A×A| = |2→A| = |A|2 = |A| < 2|A|(康托定理)= |P(A)| = | A→2| (1 分)。

　　注(1)(2)(5)(6)结果相同，可合并。

　　4. 在一种计算机信息检索的模型中，一个文件是由一些关键字组成的，而一个倒排文件是由含有某个关键字的所有文件组成的。一次查询的输入是一个关键字，输出是这个关键字的倒排文件，一次查询的开销就是包含这个关键字的文件个数。多次查询就是查询一个关键字序列(其中可能有重复关键字)中的每个关键字，多次查询的开销是各次查询的开销之和，其中重复查询同一个关键字的开销之只计算一次。假设关键字和文件的个数都是有限的，试用集合论或图论的术语来描述这个模型，并给出上述斜体字概念的形式化定义。

　　解答与评分标准：

　　集合论：

　　文件集合 D={d1,d2,…,dn}，关键字集合K={k1,k2,…,km}，倒排文件集合

　　K’={k1’,k2’,…,km’ }与关键字集合K 一一对应。D 包含于P(K)，K’包含于

　　P(D)，ki 属于dj 当且仅当dj 属于ki’(4 分)。查询是从K 到P(D)的函数

　　Q：K→P(D)，查询k 是求Q(k)(2 分)，查询k 的开销是|Q(k)|(2 分)。

　　多次查询(s1,s2,…,st)就是求(Q(s1),Q(s2),…,Q(st))，多次查询的开销是对不同的si 求|Q(si)|之和(2 分)。

　　图论：

　　二部图 G=，D 为文件集合，K 为关键字集合，E 为边集合，(d,k)是E 中的边当且仅当文件d 含有关键字k(4 分)。文件d 的内容就是d的相邻顶点集合(邻域)，倒排文件k 的内容就是k 的邻域，查询k 就是求k 的邻域(2 分)，查询k 的开销就是k 的度数(2 分)。多次查询就是求一组关键字的邻域，多次查询的开销就是这组关键字顶点的度数之和，重复关键字只计算一次(2 分)。